

IDENTIFIKASI KESALAHAN PEMBUKTIAN MATEMATIS SISWA PADA MATERI APLIKASI TRIGONOMETRI

Herizal

Universitas Pendidikan Indonesia, Indonesia

Universitas Malikussaleh, Aceh, Indonesia

herizal_mathedu@upi.edu

Abstract Mathematical proof ability is a critical skill that fosters higher-order thinking in students. Due to the importance of this skill, a qualitative study was conducted to identify students' errors in solving mathematical proof problems related to trigonometric applications. The study involved 30 tenth-grade high school students from a school in Bandung, who were given four validated mathematical proof problems. In addition to written tests, several students were interviewed to further investigate the types of errors and their underlying causes. The findings revealed several categories of student errors: (1) incorrect application of the sine rule, cosine rule, and triangle area formulas; (2) failure to construct conjectures based on given patterns; (3) attempting to prove statements using examples; and (4) errors in algebraic manipulation processes. These errors were largely attributed to a lack of conceptual understanding and limited experience with mathematical proof. Therefore, the study recommends the development of instructional designs that emphasize mathematical proof activities to support students' conceptual understanding and enhance their deductive reasoning skills.

Keywords: *mathematical proof, trigonometric applications, student errors.*

Abstrak Kemampuan pembuktian matematis adalah keterampilan penting yang mendorong siswa berpikir pada tingkat tinggi. Karena pentingnya kemampuan tersebut, sebuah penelitian kualitatif dilakukan yang bertujuan untuk mengidentifikasi kesalahan siswa dalam memecahkan soal-soal pembuktian matematis materi aplikasi trigonometri. Sebanyak 30 siswa SMA kelas X di salah satu sekolah di kota Bandung diberikan 4 soal pembuktian matematis yang telah divalidasi. Selain tes, beberapa siswa juga diwawancarai untuk mengungkap kesalahan serta faktor penyebabnya. Dari hasil penelitian teridentifikasi beberapa jenis kesalahan jawaban siswa, yaitu: 1) salah dalam menentukan bentuk aturan sinus, bentuk aturan cosinus, dan rumus luas daerah segitiga; 2) salah dalam menyusun sebuah konjektur dari pola-pola yang diberikan pada soal; 3) membuktikan pernyataan menggunakan contoh, dan 4) salah dalam proses manipulasi aljabar. Kesalahan-kesalahan ini sebagian besar disebabkan oleh kurangnya pemahaman konsep dan minimnya pengalaman siswa dalam melakukan pembuktian matematis. Oleh karena itu, penelitian ini merekomendasikan pengembangan desain pembelajaran yang lebih berfokus pada aktivitas pembuktian matematis untuk membantu siswa memahami konsep dan meningkatkan keterampilan berpikir deduktif.

Kata-kata Kunci: *bukti matematis, kesalahan siswa, trigonometri.*

PENDAHULUAN

Kemampuan pembuktian matematis termasuk ke dalam kemampuan penalaran matematis. Brodie (2009) mengemukakan bahwa bukti adalah bagian dari kemampuan penalaran matematis dikarenakan bukti itu merupakan salah satu bentuk dari proses argumentasi dan proses justifikasi suatu pernyataan. Namun demikian, banyak juga ahli yang berpendapat bahwa tidak ada perbedaan antara pembuktian matematis dengan penalaran matematis karena melihat indikator dari setiap kemampuan tersebut.

Dari suatu proses pembuktian, diperoleh sebuah produk berupa serangkaian pernyataan yang menunjukkan benarnya sebuah pernyataan matematis. Kumpulan argumen itulah yang disebut dengan bukti matematis. Beberapa pakar mengemukakan definisi bukti matematis, misal bukti matematis adalah sejumlah pernyataan untuk membuktikan teorema (Selden & Selden, 2003). Houston (2009) menjelaskan definisi bukti matematis sebagai suatu argumen untuk menunjukan bahwa suatu pernyataan matematika itu sah. Ada juga yang mendefinisikan bukti matematis sebagai sebuah argumen yang meyakinkan dan ditulis dalam bahasa matematis untuk menunjukkan sebuah pernyataan benar (Solow, 2014). Dari pendapat-pendapat yang telah dikemukakan, bukti matematis didefinisikan sebagai serangkaian argumen matematis yang disusun untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan matematis.

Kemampuan pembuktian matematis adalah kemampuan untuk mengonstruksi suatu bukti matematis. Ada banyak manfaat belajar mengonstruksi bukti matematis, salah satunya adalah latihan penalaran logis yang dibutuhkan dalam pemecahan masalah. Hemmi & Lofwall (2009) menganggap pembuktian dan pemecahan masalah matematis sebagai aktivitas yang mirip. Selain itu, pembuktian matematis juga berfungsi untuk menjadikan siswa paham konsep matematika (Hersh, 1993). Dari pendapat-pendapat di atas, dapat disimpulkan bahwa kemampuan pembuktian matematis perlu diasah dan diajarkan bagi siswa.

Menguasai kemampuan pembuktian matematis menjadi salah satu tujuan akhir belajar matematika (Keputusan Kepala BSKAP Kemendikbudristek, 2022; NCTM, 2000). Dari dokumen Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Pendidikan Tinggi nomor 008/H/KR/2022 tentang Capaian Pembelajaran (CP) pada berbagai jenjang pendidikan pada kurikulum merdeka disebutkan bahwa satu diantara beberapa tujuan dalam belajar matematika adalah siswa dapat menggunakan penalaran dari pola dan sifat yang terbentuk, melakukan manipulasi matematis dalam proses generalisasi, menyusun suatu bukti matematis, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika.

Penguatan kemampuan pembuktian matematis juga sejalan dengan penguatan untuk tercapainya keterampilan abad 21. Dalam kerangka keterampilan abad 21, satu diantaranya adalah keterampilan belajar dan inovasi, dimana keterampilan tersebut terdiri dari tiga kemampuan, yaitu berpikir kritis dan pemecahan masalah, kreativitas dan inovasi, serta komunikasi dan kolaborasi. Untuk meningkatkan keterampilan berpikir kritis, diantara beberapa kemampuan yang mendukung adalah kemampuan penalaran. Dalam matematika, beberapa indikator berpikir kritis sama dengan indikator penalaran. Karenanya, untuk meningkatkan kemampuan berpikir kritis sebagai tuntutan abad 21 dapat dimulai dengan meningkatkan

kemampuan penalaran matematis dimana pembuktian matematis masuk ke dalamnya (Herizal, 2021). Hal yang sama juga dikemukakan oleh Dickersen (Doruk & Kaplan, 2015) yang menyatakan bahwa kemampuan penalaran serta berpikir matematika tingkat tinggi dapat ditingkatkan melalui pembelajaran bukti matematis.

Meskipun bermanfaat bagi siswa di sekolah menengah, pembuktian matematis kurang mendapat perhatian di level tersebut. Penelusuran hasil penelitian tentang pembuktian matematis juga masih didominasi oleh subjek mahasiswa. Adapun untuk siswa SMA di Indonesia, penelitian seputar kemampuan pembuktian matematis mencakup beberapa hal, seperti penelitian pada buku kurikulum 2013 untuk melihat konten penalaran dan pembuktian matematis (Utari & Hartono, 2019), kajian faktor yang memengaruhi kemampuan pembuktian matematis (Herizal, 2020), penelitian eksperimen untuk meningkatkan kemampuan pembuktian matematis (Aryadi & Ahmatika, 2018; Mubarok et al., 2018), penelitian yang melihat bagaimana kemampuan siswa SMA mengonstruksi suatu bukti matematis dan cara berpikirnya (Fatmahayati et al., 2019; Hermanto et al., 2016). Namun, belum ada penelitian yang secara spesifik mengidentifikasi dan mengklasifikasikan jenis kesalahan yang dilakukan siswa SMA dalam mengonstruksi bukti matematis, terutama pada materi aplikasi trigonometri. Kesenjangan ini menunjukkan bahwa diperlukan penelitian yang secara spesifik mengeksplorasi jenis kesalahan siswa dalam pembuktian matematis pada materi tersebut. Untuk itu, fokus dalam penelitian ini adalah menjabarkan kesalahan-kesalahan siswa dalam mengonstruksi bukti matematis. Tujuannya adalah untuk mendeteksi kesalahan siswa saat mengonstruksi bukti matematis pada materi aplikasi trigonometri sehingga ke depan para pengajar dapat memberikan perhatian agar siswa tidak mengulang lagi kesalahan yang sama.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif. Penggunaan metode penelitian kualitatif dikarenakan penelitian kualitatif didesain untuk memberikan deskripsi mendalam tentang suatu program, praktik, atau *setting* tertentu (Creswell, 2014; Mertens, 2015). Dalam konteks penelitian ini, penelitian kualitatif sangat relevan untuk memahami bagaimana kemampuan pembuktian matematis siswa serta apa saja faktor yang memengaruhi terjadinya kesalahan selama proses pembuktian. Adapun yang menjadi partisipan pada penelitian ini adalah 30 siswa di salah satu SMA Swasta di Kota Bandung.

Untuk mengidentifikasi kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada topik aplikasi trigonometri, ada tiga tahapan yang dilakukan oleh peneliti, yaitu sebagai berikut.

Pertama, observasi proses pembelajaran topik aplikasi trigonometri yang dilalui oleh siswa. Observasi ini dilakukan untuk mengetahui sejauh mana kegiatan pembelajaran telah mendukung atau mengakomodasi pengembangan kemampuan pembuktian matematis siswa.

Kedua, tes, yaitu untuk mengukur kemampuan seseorang pada bidang tertentu (Fraenkel et al., 2012), dalam hal ini diberikan sebanyak 4 soal untuk mengukur kemampuan pembuktian matematis siswa. Adapun indikator untuk setiap soalnya adalah sebagai berikut, (1) Mengaplikasikan setiap tahapan pembuktian yang diberikan ke dalam pembuktian pernyataan matematis lain yang serupa, (2) Menyusun suatu konjektur dari pola-pola yang diberikan serta membuktikan konjektur tersebut, (3) Menunjukkan kebenaran suatu pernyataan menggunakan

fakta-fakta yang diberikan dan (4) Mengonstruksi suatu bukti lengkap dari suatu pernyataan (diadaptasi dari Hamid, 2016; Samparadja, 2014; Yerizon, 2011). Untuk menjamin validitas isi, soal-soal ini telah melalui proses validasi oleh dua dosen ahli dalam bidang pendidikan matematika serta seorang guru matematika yang berpengalaman. Selain itu, dilakukan pula uji keterbacaan (*readability test*) terhadap beberapa siswa untuk memastikan bahwa redaksi soal, pemilihan kosakata, dan struktur kalimat yang digunakan telah sesuai dengan tingkat pemahaman siswa.

Ketiga, wawancara, dimana tujuan dari wawancara tersebut berguna untuk menggali secara mendalam fenomena yang terjadi terkait kesalahan siswa dalam pembuktian matematis.

Selanjutnya, data hasil tes dan wawancara dianalisis menggunakan prosedur analisis data kualitatif yang dinyatakan oleh Miles dan Huberman, yaitu reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan (Sugiyono, 2016).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan temuan penelitian terkait kemampuan pembuktian matematis siswa SMA yang diidentifikasi melalui tes pembuktian matematis dan wawancara. Data dianalisis menggunakan pendekatan kualitatif, yang berfokus pada kesalahan-kesalahan dalam mengonstruksi bukti matematis.

Untuk melihat gambaran umum kemampuan siswa menyelesaikan soal-soal pembuktian matematis, ada 4 soal yang diberikan dimana setiap soal mewakili satu indikator. Adapun gambaran hasilnya adalah sebagai berikut.

Tabel 1. Deskripsi Skor Kemampuan Pembuktian Matematis Siswa

No. Soal	Indikator	Rata-Rata Skor	Standar Deviasi	Skor Ideal
1	Mengaplikasikan setiap tahapan pembuktian yang diberikan ke dalam pembuktian pernyataan matematis lain yang serupa	1,90	2,47	6
2	Menyusun suatu konjektur dari pola-pola yang diberikan serta membuktikan konjektur tersebut	0,83	1,26	7
3	Menunjukkan kebenaran suatu pernyataan menggunakan fakta-fakta yang diberikan	1,50	1,38	7
4	Mengonstruksi suatu bukti lengkap dari suatu pernyataan	2,50	4	12

Tabel 1 menunjukkan bahwa pencapaian kemampuan pembuktian matematis siswa SMA pada materi aplikasi trigonometri, yang mencakup aturan sinus, aturan cosinus, dan luas daerah segitiga, masih tergolong rendah. Rata-rata skor siswa untuk setiap indikator belum mencapai 50% dari skor ideal. Pada soal nomor 1, hanya sedikit siswa yang mampu menjawab dengan benar. Soal nomor 2 bahkan menunjukkan hasil yang lebih rendah, dengan banyak siswa tidak mengisi jawaban sama sekali. Untuk soal nomor 3, rata-rata skor siswa hanya mencapai 21,43%, sedangkan soal nomor 4 memiliki persentase rata-rata skor sebesar 20,83%. Hal ini mengindikasikan bahwa soal nomor 3 dan 4 tergolong sulit bagi siswa. Analisis lembar jawaban

tes juga menunjukkan banyaknya siswa yang tidak memberikan jawaban pada kedua soal tersebut, yang semakin menegaskan keterbatasan kemampuan mereka dalam menyelesaikan masalah pembuktian matematis pada materi aplikasi trigonometri.

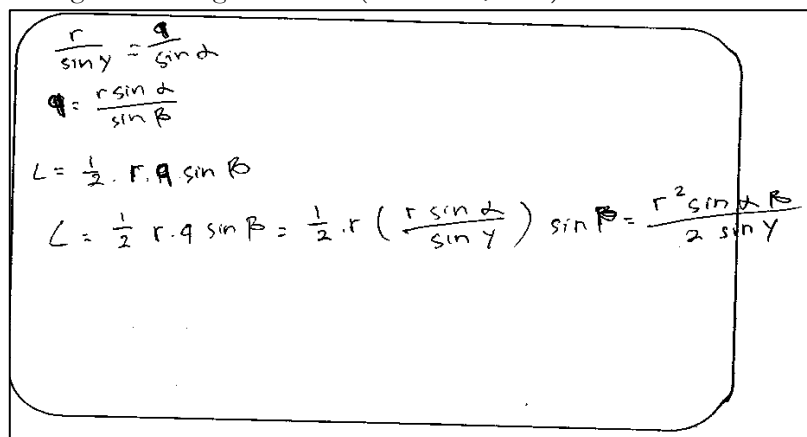
Berikut akan diuraikan kesalahan-kesalahan dari jawaban siswa dalam membuktikan pernyataan matematis pada materi aplikasi trigonometri serta faktor-faktor yang menyebabkan kesalahan tersebut. Data diperoleh dari hasil tes dan wawancara siswa. Adapun deskripsi kesalahan dan faktor penyebabnya untuk setiap soalnya adalah sebagai berikut.

Soal Nomor 1

Pada nomor ini, siswa banyak salah dalam menuliskan bentuk aturan sinus dan rumus luas daerah segitiga yang tepat sesuai dengan gambar segitiga yang diberikan. Adapun rincian kesalahannya adalah sebagai berikut.

1. Kesalahan dalam menuliskan bentuk aturan sinus yang benar

Pada Gambar 1 terlihat salah satu siswa (S9) salah dalam menuliskan perbandingan sisi dan sinus ukuran sudut. Dia menuliskan $\frac{r}{\sin \gamma} = \frac{q}{\sin \alpha}$ seharusnya yang benar adalah $\frac{r}{\sin \alpha} = \frac{q}{\sin \beta}$. Saat diwawancarai, S9 dapat menjawabnya dengan benar. Ketika jawabannya diperlihatkan, S9 mengakui kesalahannya dan dia mengatakan bahwa saat menyelesaikan soal terburu-buru sehingga melakukan kesalahan yang berakibat fatal. Dalam matematika, buru-buru dalam menyelesaikan soal akan berdampak pada jawaban yang seringnya salah. Sejalan dengan itu, penelitian Juanti et al. (2021) juga menunjukkan bahwa buru-buru atau kurang teliti akan memberikan jawaban yang salah, seperti salah dalam hal yang mendasar, misal perhitungan. Berkaitan dengan teori hambatan belajar, ketidakhatian dan buru-buru merupakan bagian dari *ontogenic obstacles* (Brousseau, 1997).



The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. It contains the following equations:

$$\frac{r}{\sin \gamma} = \frac{q}{\sin \alpha}$$

$$q = \frac{r \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot r \cdot q \sin \beta$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot r \cdot q \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot r \left(\frac{r \sin \alpha}{\sin \gamma} \right) \sin \beta = \frac{r^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}$$

Gambar 1. Jawaban S9 salah menulis aturan sinus

2. Kesalahan dalam menuliskan rumus luas daerah segitiga yang tepat

Pada gambar 1 terlihat S9 menuliskan rumus luas daerah segitiga $L = \frac{1}{2} r \cdot q \sin \beta$. Padahal bentuk yang benar adalah $L = \frac{1}{2} r \cdot q \sin \alpha$. Kesalahan tersebut disebabkan oleh siswa tidak melihat pola bahwa sudut yang digunakan adalah sudut yang dibentuk oleh sinar PQ dan PR. Siswa beranggapan bahwa rumus luas daerah segitiga adalah setengah dikalikan dengan dua sisi dan sinus satu ukuran sudut tanpa mengetahui sisi-sisi dan sudut mana yang tepat untuk digunakan. Hal ini menunjukkan bahwa pemahaman siswa terhadap konsep luas segitiga berbasis trigonometri masih bersifat parsial dan terbatas pada konteks rutin atau prosedural. Keterbatasan pemahaman semacam ini mencerminkan adanya hambatan belajar yang dikenal sebagai *epistemological obstacles* (Brousseau, 1997; Suryadi, 2019a). Kurangnya pemahaman konseptual tersebut berdampak langsung pada

ketidakmampuan siswa dalam mengonstruksi bukti matematis yang valid, karena mereka tidak memiliki dasar pemahaman yang cukup untuk memilih dan mengaitkan informasi yang relevan dalam proses pembuktian. Secara umum, kurangnya pemahaman siswa akan konsep matematis akan mengakibatkan siswa salah dalam menyelesaikan masalah-masalah dalam matematika (Abdullah et al., 2015). Selain itu, pemahaman konsep yang baik juga akan bermanfaat bagi siswa, yaitu mereka dapat menggunakan konsep yang ada untuk menemukan bentuk baru yang serupa dengan konsep lain yang telah dipelajari (Lambdin, 2003).

Soal Nomor 2

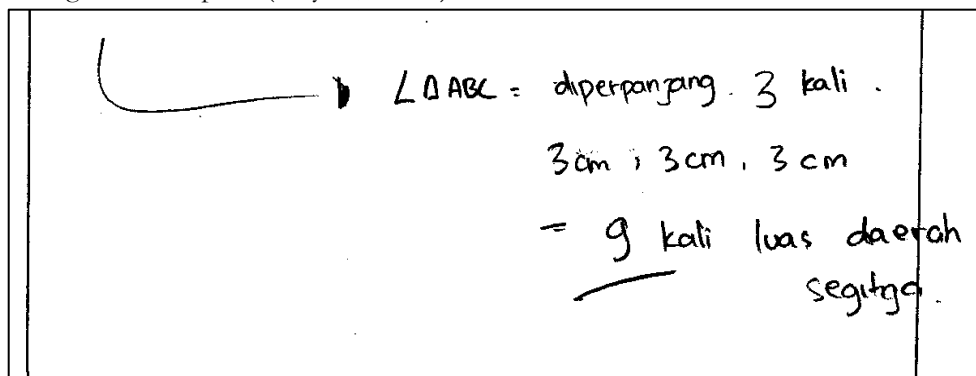
Banyak siswa yang tidak menjawab soal ini. Adapun pada lembar jawaban siswa yang mengerjakan soal ini ditemukan dua kesalahan, yaitu:

1. Kesalahan dalam menentukan dugaan berdasarkan pernyataan yang diberikan

Beberapa siswa menuliskan jawabannya berupa “m kali luas daerah segitiga ABC”, padahal jawaban yang benar adalah “ m^2 kali luas daerah segitiga ABC”. Kesalahan tersebut karena siswa gagal dalam melihat pola yang ada di pernyataan 1 dan 2, artinya siswa belum maksimal dalam hal melihat pola untuk proses menggeneralisasi. Ketidakmampuan ini mencerminkan bahwa siswa belum maksimal dalam mengidentifikasi dan memanfaatkan pola sebagai dasar untuk melakukan proses generalisasi. Dalam konteks pembuktian matematis, kemampuan melihat pola merupakan langkah awal yang krusial untuk membentuk dugaan atau konjektur, yang selanjutnya dapat dikembangkan menjadi argumen formal.

2. Membuktikan dengan contoh

Beberapa siswa yang mengerjakan soal tersebut membuktikan dugaan yang telah dibuat dengan menggunakan contoh. Salah satu jawaban siswa yang membuktikan menggunakan contoh dapat dilihat pada Gambar 2. Siswa tersebut sudah bisa membuat dugaan yang tepat bahwa luas segitiga baru yang dibentuk adalah m^2 kali luas daerah segitiga ABC. Namun saat hendak membuktikan, dia membuktikannya dengan mengambil contoh, yaitu jika sisinya diperpanjang 3 kali maka luas daerahnya adalah 9 kali luas daerah segitiga ABC. Hal ini mencerminkan miskonsepsi umum di kalangan siswa, yaitu anggapan bahwa membuktikan satu kasus spesifik sudah cukup untuk menyimpulkan kebenaran umum. Kesalahan tipe ini juga sama dengan apa yang ditemukan oleh Stavrou (2014), dimana masih ada yang membuktikan dengan menggunakan contoh. Adapun faktor penyebabnya adalah siswa tidak tahu harus memulai darimana proses pembuktiannya. S4 dalam wawancara mengatakan bahwa tidak ada gambaran cara memulai pembuktiannya. Pernyataan ini mengindikasikan bahwa siswa belum memiliki kemampuan yang cukup untuk pembuktian matematis. Fenomena seperti ini, dimana kemampuan awal yang kurang memadai masuk dalam kategori hambatan belajar ontogenik konseptual (Suryadi, 2019b).



Gambar 2. Jawaban S4 membuktikan dengan contoh

Soal Nomor 3

Soal nomor 3 dijawab oleh 21 siswa, dimana yang mendapatkan skor yang besarnya lebih dari 50% skor maksimal hanya 4 siswa, sedangkan sisanya mendapatkan skor kurang dari 50%. Beberapa kesalahan jawaban siswa dalam mengonstruksi bukti matematis pada soal nomor 2 adalah.

1. Kesalahan dalam proses aljabar

Dalam memulai proses pembuktian, siswa harus memulainya dengan menggunakan fakta i, yaitu $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Dari bentuk tersebut siswa harus mengubah fakta itu menjadi bentuk $\cos \alpha = \dots$. Saat proses pengubahan, siswa melakukan kesalahan. Siswa menuliskan $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 + a^2$. Seharusnya, di situ bukan $+a^2$ melainkan $-a^2$. Kekeliruan seperti ini merupakan jenis kesalahan yang umum ditemukan dalam konteks penyelesaian soal-soal yang melibatkan manipulasi simbolik dalam aljabar, khususnya ketika siswa harus mengoperasikan ekspresi matematika yang kompleks. Kesalahan dalam proses manipulasi aljabar seperti ini sering ditemukan dalam penelitian tentang kesalahan-kesalahan dalam menyelesaikan soal-soal aljabar (Mathaba et al., 2024; Semele & Asvat, 2024).

2. Kesalahan memahami maksud soal

Pada soal ini, siswa harus membuktikan $\cos \alpha = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} - 1$ menggunakan 3 fakta yang diberikan, artinya ketiga fakta itu saling berhubungan dan semuanya digunakan dalam proses pembuktian. Namun, ada siswa yang salah menangkap maksud dari soal (S4). Dia menganggap bahwa fakta-fakta tersebut tidak saling berkaitan. Lebih lanjut, siswa tersebut mengatakan bahwa menurut pemahamannya fakta i digunakan dan dilakukan manipulasi aljabar untuk membuktikan bentuk yang diminta. Begitu juga fakta ii dilakukan proses manipulasi aljabar untuk membuktikan bentuk yang diminta pada soal, begitu juga fakta iii. Kesalahan ini mencerminkan miskonsepsi dalam memahami struktur soal dan maksud dari instruksi pembuktian. Kesalahan memahami soal seperti ini dapat dikategorikan sebagai kesalahan awal dalam tahap comprehension, yang menurut analisis Newman merupakan tahap pertama dalam menyelesaikan soal matematika (Newman, 1977). Ketidakmampuan memahami instruksi soal dengan tepat menyebabkan siswa memilih strategi yang keliru dan gagal mencapai tujuan pembuktian secara logis dan menyeluruh.

Soal Nomor 4

Pada soal ini, jumlah siswa yang tidak mampu menjawab lebih banyak jika dibandingkan soal nomor 3. Siswa yang mendapatkan skor lebih dari 50% skor maksimal juga lebih banyak dibandingkan soal sebelumnya. Adapun kesalahan siswa yang ditemukan dalam menyelesaikan soal ini adalah kesalahan dalam mengubah bentuk aturan cosinus.

Untuk menyelesaikan soal nomor 4, hal pertama yang perlu dilakukan siswa adalah menentukan 3 aturan cosinus dan mengubah aturan-aturan tersebut dalam bentuk $\cos \alpha = \dots$, $\cos \beta = \dots$, dan $\cos \gamma = \dots$. Prosedur yang tepat seharusnya diawali dengan menuliskan tiga bentuk aturan kosinus sesuai dengan sudut yang dimaksud, dengan masing-masing memiliki penyebut yang berbeda, yakni $2bc$, $2ac$, dan $2ab$. Namun, sebagaimana terlihat pada Gambar 3, beberapa siswa menuliskan ketiga bentuk tersebut dengan penyebut yang sama, yaitu $2bc$. Kesalahan ini berdampak signifikan karena menyamakan penyebut akan menghasilkan bentuk yang tidak

konsisten, sehingga siswa tidak akan mampu mencapai bentuk akhir yang harus dibuktikan. Kesalahan lain juga ditemukan yaitu pada bagian pembilang bentuk aturan sinus yang ketiga. Di situ siswa menuliskan $a^2 + b^2 + c^2$, seharusnya adalah $a^2 + b^2 - c^2$. Ada dua faktor yang menyebabkan kesalahan di atas terjadi, yaitu: 1) kurangnya pemahaman tentang bentuk aturan cosinus (pola aturan cosinus) dan 2) ketidakteitian dalam melakukan proses aljabar. Kesalahan-kesalahan tersebut memperlihatkan bahwa siswa belum sepenuhnya memahami struktur aturan kosinus secara menyeluruh dan cenderung menghafal rumus tanpa memahami keterkaitannya dengan elemen segitiga. Selain itu, kesalahan operasional seperti salah tanda dan salah penyebut mengindikasikan lemahnya kontrol prosedural selama proses pembuktian. Hal ini tentu berdampak langsung pada keberhasilan siswa dalam mengonstruksi bukti matematis yang tepat.

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$$

$$\frac{A^2 + c^2 - B^2}{2bc} = \frac{A^2 + c^2 - B^2}{bbc}$$

$$\frac{A^2 + B^2 + c^2}{2bc} = \frac{A^2 + B^2 - c^2}{cbc}$$

Gambar 3. Jawaban S14 untuk Soal Nomor 4

Dari berbagai kesalahan yang dilakukan siswa dalam membuktikan pernyataan matematis yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa sebagian besar kesalahan tersebut berkaitan erat dengan kurangnya pengalaman siswa dalam melakukan aktivitas pembuktian. Minimnya pengalaman ini berdampak pada ketidakmampuan siswa untuk menyusun strategi, memilih fakta yang relevan, dan merangkai langkah-langkah pembuktian secara logis. Pengalaman menjadi salah satu sebab yang dapat mempengaruhi kemampuan siswa dalam pembuktian matematis (Herizal, 2020). Selain itu, hal penting yang juga dapat mengakibatkan kesalahan adalah pemahaman terhadap suatu konsep. Dapat dilihat bahwa salah dalam menuliskan bentuk aturan sinus serta luas segitiga merujuk kepada gambar yang diberikan dikarenakan mereka tidak dapat memahami dengan baik konsep-konsep tersebut. Padahal, pemahaman konsep dibutuhkan dalam pemecahan masalah matematis termasuk di dalamnya aktivitas mengonstruksi suatu bukti matematis (Abdullah et al., 2015; Lambdin, 2003).

SIMPULAN DAN SARAN

Dalam matematika, pembuktian matematis merupakan aktivitas yang esensial dan menjadi ruhnya matematika itu sendiri. Pentingnya kemampuan untuk membuktikan suatu pernyataan matematis secara khusus juga termuat dalam kurikulum matematika nasional. Materi trigonometri menjadi satu dari beberapa topik matematika di SMA yang banyak memuat konten pembuktian matematis. Ketika mengonstruksi bukti pada soal pembuktian matematis, siswa masih melakukan beberapa jenis kesalahan seperti salah dalam menentukan bentuk aturan sinus, bentuk aturan cosinus, dan rumus luas daerah segitiga; salah dalam menyusun sebuah konjektur

dari pola-pola yang yang diberikan pada soal; membuktikan pernyataan menggunakan contoh, dan salah dalam proses manipulasi aljabar. Beberapa kesalahan tersebut menyiratkan bahwa siswa SMA belum terbiasa dengan aktivitas pembuktian matematis selain memang juga masih kurangnya pemahaman konseptual mereka akan materi tersebut.

Temuan ini memberikan implikasi penting bagi praktik pembelajaran di kelas. Guru perlu merancang pembelajaran yang tidak hanya menekankan pada hasil akhir pembuktian, tetapi juga pada proses berpikir yang terlibat di dalamnya, dimulai dari eksplorasi pola, penyusunan konjektur, hingga pembuktian formal. Pembiasaan seperti ini dapat membantu siswa mengembangkan kepercayaan diri, fleksibilitas berpikir, serta keterampilan argumentasi matematis. Untuk penelitian selanjutnya, direkomendasikan adanya pengembangan suatu desain pembelajaran yang berbasis pembuktian matematis, yaitu di dalamnya memuat aktivitas seperti eksplorasi untuk mendapatkan pola, proses generalisasi, dan validasi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Peneliti berterima kasih kepada para validator yang telah bersedia memvalidasi instrumen, guru yang telah bersedia memberi izin untuk kelasnya digunakan sebagai kelas penelitian, serta siswa yang telah bersedia menjawab soal yang diberikan dan diwawancarai.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z., & Ali, M. (2015). Analysis of students' errors in solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) problems for the topic of fraction. *Asian Social Science*, 11(21), 133–142. <https://doi.org/10.5539/ass.v11n21p133>
- Aryadi, D., & Ahmatika, D. (2018). Penerapan Model Pembelajaran PACE (Project, Activity, Cooperative Learning, Exercise) untuk Meningkatkan Kemampuan Pembuktian Matematis Peserta Didik SMA. *UNINUS Journal Published*, 3(7), 92–98.
- Brodie, K. (2009). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. SAGE Publications, Inc.
- Doruk, M., & Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *1st International Eurasian Educational Research Congress*, 315–328.
- Fatmahayati, W., Ikhsan, M., & Zubainur, C. M. (2019). Proses Berpikir Siswa SMA dalam Menyusun Bukti Matematis. *GAUSS: Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(2), 63–73. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.30656/gauss.v2i2.1790>
- Fraenkel, J. R. ., Wallen, N. E. ., & Hyun, H. H. . (2012). *How to design and evaluate research in education (8th ed.)*. McGraw Hill.
- Hamid, H. (2016). *Kemampuan Pembuktian, Berpikir Kritis, dan Self-Efficacy Matematis Mahasiswa Melalui Model Rigorous Teaching and Learning (TL) dengan Memanfaatkan Argumen Informal*. Universitas Pendidikan Indonesia.
- Hemmi, K., & Lofwall, C. (2009). Why Do We Need Proof. *Proceedings of CERME 6*, 201–210.

- Herizal. (2021, June). Mathematical Proving in Secondary School, a must! *Seametical (SEAQIM)*, 17–20. <https://www.qitepinmath.org/en/publications/bulletin/seametical-vol-2-no-1/mathematical-proving-in-secondary-school-a-must/>
- Herizal, H. (2020). Faktor yang Memengaruhi Kemampuan Pembuktian Matematis Siswa. *Vygotsky*, 2(1), 33–42. <https://doi.org/10.30736/vj.v2i1.187>
- Hermanto, Kodirun, & Anggo, M. (2016). Analisis kemampuan pembuktian matematis siswa SMA terhadap matriks ditinjau dari pengetahuan awal matematika. *Jurnal Pembelajaran Berpikir Matematika*, 1(2), 11–18. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.33772/jpbm.v1i2.8144>
- Hersh, R. (1993). Proving Is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389–399.
- Houston, K. (2009). *How to Think Like a Mathematician: A Companion to Undergraduate Mathematics*. Cambridge University Press.
- Juanti, S., Karolina, R., & Zanthi, L. S. (2021). Analisis Kesulitan dalam Menyelesaikan Soal Geometri Pokok Bahasan Bangun Ruang Sisi Datar. *JPMI – Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif*, 4(2), 239–248. <https://doi.org/10.22460/jpmi.v4i2.239-248>
- Lambdin, D. V. (2003). Benefits of teaching through problem solving. In F. K. Lester (Ed.), *Teaching Mathematics through Problem Solving: Prekindergarten - Grade 6* (pp. 3–13). NCTM. <https://www.nctm.org/Store/Products/Teaching-Mathematics-through-Problem-Solving--Prekindergarten-Grade-6/>
- Mathaba, P. N., Bayaga, A., Tirnovan, D., & Bossé, M. J. (2024). Error analysis in algebra learning : Exploring misconceptions and cognitive levels. *Journal on Mathematics Education*, 15(2), 575–592. <https://doi.org/10.22342/jme.v15i2.pp575-592>
- Mertens, D. M. (2015). *Research and evaluation in education and psychology : integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. SAGE Publications, Inc.
- Mubarok, M. soi., Pujiastuti, E., & Suparsih, H. (2018). Meningkatkan kemampuan pembuktian matematis dan rasa ingin tahu siswa kelas XI MIPA SMA Negeri 6 Semarang melalui model PBL. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 1(2000), 677–683. <https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/article/view/20217>
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. In M. A. Clements & J. Foyster (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australia* (pp. 269–287). Swinburne College Press.
- Samparadja, H. (2014). *Pengaruh Pendekatan Induktif-Deduktif berbasis Definisi Termodifikasi dalam Pembelajaran Struktur Aljabar terhadap Peningkatan Kemampuan Pembuktian dan Disposisi Berpikir Kreatif Matematis Mahasiswa*. Universitas Pendidikan Indonesia.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36. <https://doi.org/10.2307/30034698>
- Solow, D. (2014). *How to Read and Do Proofs*. John Wiley & Sons, Inc.



- Stemele, B. P., & Asvat, Z. J. (2024). Exploring Learner Errors and Misconceptions in Algebraic Expressions with Grade 9 Learners Through the use of Algebra Tiles. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 28(1), 153–170. <https://doi.org/10.1080/18117295.2024.2334989>
- Sugiyono. (2016). *Metode Penelitian Kombinasi (Mixed Methods)*. Alfabeta.
- Suryadi, D. (2019a). *Penelitian Desain Didaktis (DDR) dan Implementasinya*. Gapura Press.
- Suryadi, D. (2019b). *Philosophical Foundation of Didactical Design Research (DDR)*. Gapura Press.
- Utari, T., & Hartono, H. (2019). Muatan penalaran dan pembuktian matematis pada buku teks matematika SMA kelas X Kurikulum 2013. 6(1), 1–13. <https://doi.org/https://doi.org/10.21831/jrpm.v6i1.17002>
- Yerizon. (2011). *Peningkatan kemampuan pembuktian dan kemandirian Belajar Matematik Mahasiswa melalui Pendekatan M-APOS*. Universitas Pendidikan Indonesia.